MPA S2 algèbre. Devoir maison à rendre pour le 6 mars 2014.

C. Huyghe

Ce devoir interviendra dans la note de contrôle continu.

1. 1- On appelle racine n-ième de l'unité dans $\mathbb{C}$ un nombre complexe ω tel que $\omega^n = 1$. On dit que ω est primitive si

   $$\omega^m = 1 \Leftrightarrow m = n.$$

   Donner un exemple de racine n-ième primitive de l'unité dans $\mathbb{C}$ (sous forme exponentielle).

   2- Soit ω une racine n-ième de l'unité dans $\mathbb{C}$. Montrer que

   $$1 + \omega + \ldots + \omega^{n-1} = 0.$$

   En déduire que

   $$\sum_{k=0}^{n-1} sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 0.$$

   3- Donner la liste des racines 5-ième de l'unité.

   4- Soient ζ une racine 5-ième de l'unité et $a \in \mathbb{C}$ une racine de $P(X) = X^5 + 1$. Montrer que $a\zeta$ est une racine de P. En déduire le calcul des 5 racines complexes de P.

2. 1- Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose

   $$f(z) = \frac{z-1}{z+1}.$$

   Montrer que f induit une bijection : $f : \mathbb{C}\backslash\{-1\} \to \mathbb{C}\backslash\{1\}$. Calculer la bijection réciproque $f^{-1} : \mathbb{C}\backslash\{1\} \to \mathbb{C}\backslash\{-1\}$.

   2- Montrer que pour $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, on a

   $$\frac{1 + e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}} = icotan\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

   3- Combien l'équation dans $\mathbb{C}$, $(z-1)^n = (z+1)^n$ a-t-elle de solutions (en comptant les racines avec multiplicité) ? Résoudre cette équation. En déduire une factorisation du polynôme $Q(z) = (z-1)^n - (z+1)^n$.

3. Répondre par V (Vrai) ou F (Faux) aux questions suivantes. Donner une démonstration si la proposition est vraie et un contre-exemple sinon.

1- Soit E l'espace vectoriel réel des suites à valeurs réelles. Soit M l'ensemble des suites croissantes de E. Est-ce que M est un sous-espace vectoriel de E ?

2- Est-ce que la réunion de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?

3- Soit $t \in \mathbb{R}$, est-ce que les 3 vecteurs suivants forment une base de $\mathbb{C}^3$:

$$U = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} 1 \\ t^2+1 \\ 0 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 1-i \\ t^2+1 \\ -i \end{bmatrix}.$$

4. Soit $A \in M_2(\mathbb{C})$, $A = (a_{i,j})$. On Pose

$$E = \{A \in M_2(\mathbb{C}) \mid a_{1,1} + a_{2,2} = 0\}.$$

1- Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{C})$.

2- Montrer que si $A \in E$, ${}^tA \in E$ (E est stable par transposition).

3- Montrer que les matrices

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, T_2 =^t T_1, T_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

sont des éléments de E et forment une famille libre de E.

4- Montrer que T_1, T_2, et T_3 forment une famille génératrice de E et donc une base de E.